

УДК 372.8

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ» ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 11 КЛАССА

© Т.Б. Соломахо

Аннотация. Статья посвящена разработке одного из средств профильной подготовки выпускников общеобразовательной школы – элективного курса по математике. Данный курс призван углублять и дополнять знания, полученные в учебном процессе. Рассмотрены решения уравнений и неравенств с использованием функций, входящих в них, проработаны различные приемы решения логарифмических, показательных, иррациональных уравнений и неравенств.

Ключевые слова: уравнения; неравенства; функции; степени; логарифмы; радикалы; нестандартные методы решения; элективный курс

Современная школа призвана решать две тесно связанные задачи: обеспечить учащихся установленным объемом знаний и умений по алгебре и геометрии, а также создать необходимые условия для дополнительного изучения курса математики для учащихся, которые проявляют интерес и склонность к данному предмету [1].

В настоящее время в материалах ЕГЭ предлагаются уравнения и неравенства, решаемые нестандартными способами. Решение таких заданий зачастую вызывает затруднения у учащихся. Это связано с тем, что выпускникам требуется не только уметь выполнять алгебраические действия и преобразования, а также знать свойства уравнений и функций, но и уметь логически мыслить и применять навыки исследования. Незнание нестандартных методов решения существенно усложняет работу: учащиеся вынуждены производить большое количество преобразований и вычислений, во время которых либо получают неправильный ответ, либо теряют интерес к решению задания [2].

Элективный курс «Различные методы решения уравнений и неравенств» помогает глубоко изучить темы, входящие в учебный курс алгебры 11 класса. Данный курс призван углублять и дополнять знания, полученные в учебном процессе. Рассматриваются решения уравнений и неравенств с использованием функций, входящих в них, прорабатываются различные приемы решения логарифмических, показательных, иррациональных уравнений и неравенств, что в итоге приводит к систематизации знаний у учащихся, развивает логическое и творческое мышление, а также учит поиску решений в нестандартных ситуациях. Практи-

ческим результатом курса является дополнительная подготовка учащихся к сдаче ЕГЭ по математике.

Цели курса:

- систематизация методов решения уравнений и неравенств;
- формирование умений и навыков решения уравнений и неравенств;
- изучение новых, нестандартных методов решения;
- развитие у учащихся таких мыслительных процессов, как анализ, синтез, сравнение, обобщение и так далее;
- стимулирование активности учащихся;
- выявление и развитие математических способностей.

Задачи курса:

- углубление знаний по данной теме;
- расширение представлений о приемах и способах решения заданий различного типа сложности;
- повышение уровня логического мышления у учащихся;
- развитие навыков исследовательской деятельности;
- подготовка к сдаче ЕГЭ, поступлению в высшее учебное заведение и продолжению образования.

По окончании курса учащиеся должны уверенно решать задания обязательного и повышенного уровня сложности, грамотно и точно излагать собственные рассуждения при решении заданий, применять различные приемы при решении задач.

Элективный курс рассчитан на 17 часов.

Для более эффективной работы с учащимися желательно использовать медиаресурсы, организовывать самостоятельную работу учащихся с использованием дистанционных образовательных технологий. Основными дидактическими средствами для данного курса являются задания из различных сборников для подготовки к экзамену и открытого банка ЕГЭ.

Содержание элективного курса

1. Входное тестирование (1 час)

Знакомство учащихся с целями и задачами курса. Тестирование с целью определения уровня знаний по данной теме.

2. Тема «Нестандартные способы решения уравнений» (3 часа)

Рассматриваются: теорема Безу, разложение многочлена на множители, методы введения параметра и новой переменной.

Некоторые задания из данной темы.

Пример 1. Формулы Виета.

Найти кубическое уравнение, корни которого являются квадратами корней данного уравнения $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$.

Решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = 5 \end{cases}$$

Обозначим корни искомого кубического уравнения как y_1, y_2, y_3 :

$$y_1 + y_2 + y_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 3^2 - 2 \times 7 = -5$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 7^2 - 2 \times 3 \times (-5) = 79$$

$$y_1y_2y_3 = (x_1x_2x_3)^2$$

Ответ: $y^3 + 5y^2 + 79y + 25 = 0$ [3].

Пример 2. Решение уравнения с выделением полного квадрата.

Решить уравнение: $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$.

Решение: представим $-3x^2$ как $(x^2 - 4x^2)$, свернем по формуле и вынесем общий множитель. Получим $(x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) + 4 = 0$.

Введем замену: $y = x^2 - x$, получим уравнение $y^2 - 4y + 4 = 0$.

Решив его, получаем $y = 2 \Rightarrow x^2 - x = 2, x = -1$ или $x = 2$.

Ответ: $-1; 2$.

3. Тема «Нестандартные методы решений уравнений и неравенств, содержащих степени, радикалы, логарифмы, модули» (8 часов)

Рассматриваются такие вопросы, как возведение в степень при решении иррациональных уравнений; решение уравнений и неравенств, которые содержат неизвестную в основании логарифма; решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную в основании и показателе степени; решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Примеры для практических занятий по данной теме.

Пример 1.

Решить неравенство $\cos x \geq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$.

Решение: в задании присутствуют функции разного вида: справа – сумма квадратичной функции и квадратного корня, в левой части – тригонометрическая функция. Правая часть данного неравенства имеет смысл при $y - x^2 - 1 \geq 0$, то есть $y^2 > x^2 + 1$, а $x^2 + 1 \geq 1$, следова-

тельно, $y \geq 1$, то есть $y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} \geq 1$, но $|\cos x| \leq 1$. При всех действительных значениях x выполняется неравенство $\cos x \leq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$, поэтому наше неравенство может быть выполнено при $\cos x = y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} = 1$, то есть при $x = 0, y = 1$. Ответ: $(0; 1)$.

Пример 2.

Решить неравенство $\cos x \leq \sqrt{x} + 1$.

Решение: в данном неравенстве присутствуют функции разного вида, решим его методом оценки. По определению $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{x} + 1 \geq 1, |\cos x| \leq 1$. При всех допустимых значениях $x \geq 0$ выполняется неравенство $\cos x \leq \sqrt{x} + 1$, следовательно, решением неравенства является $x \geq 0$.

Ответ: $(0; +\infty)$ [4].

4. Тема «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств с использованием свойств входящих в них функций» (3 часа)

В данной теме рассматриваются область допустимых значений, ограниченность функций, использование монотонности функций, графики функций, четность функций.

Некоторые задания для работы в классе (использование свойств ограниченности функции).

Пример 1.

Решить неравенство $\cos x \geq x^2 + 1$.

Решение: так как при любом x справедливы неравенства $x \leq 1$ и $x^2 + x \geq 1$, то данное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $\cos x = x^2 + 1 = 1$.

То есть при $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Пример 2.

Решить уравнение $2^{-\cos x} = \log_{\pi} x + \log_x \pi$.

Решение: так как $-1 \leq \cos x \leq 1$, то левая часть уравнения $2^{-\cos x}$ принимает значения от $\frac{1}{2}$ до 2. Правая часть уравнения $\log_{\pi} x + \log_x \pi = \log_{\pi} x + \frac{1}{\log_{\pi} x}$ по модулю больше или равняется 2 (в силу неравенства для взаимно-обратных чисел), следовательно, уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия:

$$2^{-\cos x} = 2 \text{ и } \log_{\pi} x + \log_x \pi = 2$$

$$\cos x = 1 \text{ и } \log_{\pi} x = 1$$

$$x = \pi \text{ и } x = \pi$$

Ответ: $x = \pi$ [5] [6].

5. Обобщающее занятие (1 час)

Повторение пройденных тем.

6. Итоговая контрольная работа (1 час)

Контрольная работа, подведение итогов.

Уровень достижений учащихся определяется в результате беседы, выполнения практических заданий и самостоятельных работ. Для закрепления лекционного материала и практики по решению задач дается индивидуальное или групповое домашнее задание для самостоятельного решения. Защита решений проводится на отдельном занятии и оценивается по пятибалльной системе или «зачет-незачет». Предусмотрен итоговый зачет по окончании курса.

Изучение нестандартных методов решения уравнений и неравенств существенно расширяет знания, полученные в ходе изучения школьной программы математики; позволяет решать уравнения и неравенства более рациональными способами, думать не по шаблону; придает учащимся уверенность в собственных силах, увеличивает интерес к изучению предмета, готовит школьников к успешной сдаче экзамена.

Список литературы

1. *Горништейн П.И.* Экзамен по математике и его подводные рифы. М.: Илекса, 2004.
2. *Балаян Э.Н.* Репетитор по математике для поступающих в вузы. Ростов н/Д.: Феникс, 2016.
3. *Гольдич В.А.* Решение уравнений и неравенств. СПб.: Литера, 2004.
4. *Ковалева И.Г.* Математика. Функции, уравнения, неравенства: задания повышенной сложности. Волгоград: Учитель, 2010.
5. *Шабунин М.И.* Математика: пособие для поступающих в вузы. М., 2009. 694 с.
6. *Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В.* Конкурсные задачи по математике. М., 2003. 415 с.

Поступила в редакцию 09.04.2019 г.

Отрецензирована 24.04.2019 г.

Принята в печать 14.05.2019 г.

Информация об авторе:

Соломахо Татьяна Борисовна – магистрант по направлению подготовки «Математика». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: solomahov@bk.ru

ELECTIVE COURSE “DIFFERENT METHODS OF SOLVING EQUATIONS AND INEQUALITIES” FOR 11TH GRADE STUDENTS

Solomakho T.B., Master’s Degree Student in “Mathematics” Programme. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: solomahov@bk.ru

Abstract. We devote this article to the development of specialized training means for general education school graduates – the elective course of mathematics. This course can deepen and broaden the knowledge which students get during educational process. We consider the equations and inequations solutions and their constituent functions usage. We review different methods of logarithmic, exponential, irrational solutions of equations and inequations.

Keywords: equations; inequations; functions; quotient; logarithms; radicals; non-conventional solution methods; elective course

Received 9 April 2019

Reviewed 24 April 2019

Accepted for press 14 May 2019